Пусть произведено n взаимно независимых экспериментов с двумерной случайной величиной (X, Y). Получены пары чисел (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), … , (X_n, Y_n). Допустим, что исходя из физического смысла задачи функция, связывающая X и Y не является линейной комбинацией некоторых функций. Поэтому метод наименьших квадратов неприменим. Тем не менее, иногда удаётся совершить алгебраические преобразования так, что некоторая функция от Y окажется линейной комбинацией функций от X.

Приведём пример. Пусть известно, что зависимость между X и Y должна быть выражена формулой: $Y = A \cdot X^k \cdot e^{\lambda X} \cdot \varepsilon$. Все переменные в этом равенстве положительные, а ε случайная величина (помехи). Поскольку в правой части равенства стоит произведение, то это равенство разумно прологарифмировать:

$$\ln(Y) = \ln\left(A \cdot X^k \cdot e^{\lambda X} \cdot \varepsilon\right) = \ln(A) + \ln\left(X^k\right) + \ln\left(e^{\lambda X}\right) + \ln(\varepsilon) =$$

$$= \ln(A) + k \cdot \ln(X) + \lambda \cdot X + \ln(\varepsilon) = a + k \cdot \ln(X) + \lambda \cdot X + \ln(\varepsilon).$$

Здесь временно обозначено $a=\ln(A)$. Теперь логарифм от Y оказался выражен через линейную комбинацию трёх функций: единицы, логарифма и самого X. Было бы неплохо, если бы математическое ожидание от логарифма помех было бы равно нулю, но если даже это не так, то всё равно можно будет воспользоваться методом наименьших квадратов, воспринимая a, как систематическую часть помех, которые всё равно неизвестны.

Минимизируем функцию трёх аргументов:

$f(a,k,\lambda) = \sum_{i=1}^{n}\left(\ln(Y_i) - \left(a + k \cdot \ln(X_i) + \lambda \cdot X_i\right)\right)^2$. Согласно теоремам математического анализа функция трёх переменных будет достигать минимума в той точке, где все три её частные производные равны нулю. Найдём эти производные:

$$\frac{\partial f(a,k,\lambda)}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(Y_i) - \left(a + k \cdot \ln(X_i) + \lambda \cdot X_i\right)\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial a}\left(\ln(Y_i) - \left(a + k \cdot \ln(X_i) + \lambda \cdot X_i\right)\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2\left(\ln(Y_i) - \left(a + k \cdot \ln(X_i) + \lambda \cdot X_i\right)\right)\frac{\partial}{\partial a}\left(\ln(Y_i) - \left(a + k \cdot \ln(X_i) + \lambda \cdot X_i\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2\left(\ln(Y_i) - \left(a + k \cdot \ln(X_i) + \lambda \cdot X_i\right)\right)(-1) = 2\sum_{i=1}^{n}\left(a + k \cdot \ln(X_i) + \lambda \cdot X_i - \ln(Y_i)\right) =$$

$$= 2\left(\sum_{i=1}^{n} a + \sum_{i=1}^{n} k \cdot \ln(X_i) + \sum_{i=1}^{n} \lambda \cdot X_i - \sum_{i=1}^{n}\ln(Y_i)\right) =$$

$$= 2\left(n \cdot a + k \cdot \sum_{i=1}^{n}\ln(X_i) + \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n}\ln(Y_i)\right)$$

$$\frac{\partial f(a,k,\lambda)}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(Y_i) - \left(a + k \cdot \ln(X_i) + \lambda \cdot X_i\right)\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial k}\left(\ln(Y_i) - \left(a + k \cdot \ln(X_i) + \lambda \cdot X_i\right)\right)^2 =$$

$$=\sum_{i=1}^{n}2\left(\ln(Y_i)-\left(a+k\cdot\ln(X_i)+\lambda\cdot X_i\right)\right)\frac{\partial}{\partial k}\left(\ln(Y_i)-\left(a+k\cdot\ln(X_i)+\lambda\cdot X_i\right)\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}2\left(\ln(Y_i)-\left(a+k\cdot\ln(X_i)+\lambda\cdot X_i\right)\right)\left(-\ln(X_i)\right)=$$

$$=2\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)\left(a+k\cdot\ln(X_i)+\lambda\cdot X_i-\ln(Y_i)\right)=$$

$$=2\sum_{i=1}^{n}\left(a\cdot\ln(X_i)+k\cdot\ln(X_i)\cdot\ln(X_i)+\lambda\cdot X_i\cdot\ln(X_i)-\ln(X_i)\cdot\ln(Y_i)\right)=$$

$$=2\sum_{i=1}^{n}\left(a\cdot\ln(X_i)+k\cdot\left(\ln(X_i)\right)^2+\lambda\cdot X_i\cdot\ln(X_i)-\ln(X_i)\cdot\ln(Y_i)\right)=$$

$$=2\left(\sum_{i=1}^{n}a\cdot\ln(X_i)+\sum_{i=1}^{n}k\cdot\left(\ln(X_i)\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\lambda\cdot X_i\cdot\ln(X_i)-\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)\cdot\ln(Y_i)\right)=$$

$$=2\left(a\cdot\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)+k\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(X_i)\right)^2+\lambda\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i\cdot\ln(X_i)-\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)\cdot\ln(Y_i)\right)$$

$$\frac{\partial f(a,k,\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{\partial}{\partial\lambda}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(Y_i)-\left(a+k\cdot\ln(X_i)+\lambda\cdot X_i\right)\right)^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\ln(Y_i)-\left(a+k\cdot\ln(X_i)+\lambda\cdot X_i\right)\right)^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}2\left(\ln(Y_i)-\left(a+k\cdot\ln(X_i)+\lambda\cdot X_i\right)\right)\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\ln(Y_i)-\left(a+k\cdot\ln(X_i)+\lambda\cdot X_i\right)\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}2\left(\ln(Y_i)-\left(a+k\cdot\ln(X_i)+\lambda\cdot X_i\right)\right)\left(-X_i\right)=$$

$$=2\sum_{i=1}^{n}X_i\left(a+k\cdot\ln(X_i)+\lambda\cdot X_i-\ln(Y_i)\right)=$$

$$=2\sum_{i=1}^{n}\left(a\cdot X_i+k\cdot X_i\cdot\ln(X_i)+\lambda\cdot X_i\cdot X_i-X_i\cdot\ln(Y_i)\right)=$$

$$=2\sum_{i=1}^{n}\left(a\cdot X_i+k\cdot X_i\cdot\ln(X_i)+\lambda\cdot(X_i)^2-X_i\cdot\ln(Y_i)\right)=$$

$$=2\left(\sum_{i=1}^{n}a\cdot X_i+\sum_{i=1}^{n}k\cdot X_i\cdot\ln(X_i)+\sum_{i=1}^{n}\lambda\cdot(X_i)^2-\sum_{i=1}^{n}X_i\cdot\ln(Y_i)\right)=$$

$$=2\left(a\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i+k\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i\cdot\ln(X_i)+\lambda\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2-\sum_{i=1}^{n}X_i\cdot\ln(Y_i)\right)$$

Теперь приравняем все эти 3 частные производных нулю. Получим систему трёх уравнений относительно трёх неизвестных:

$$\begin{cases} 2\left(n\cdot a + k\cdot\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i) + \lambda\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i - \sum_{i=1}^{n}\ln(Y_i)\right) = 0 \\ 2\left(a\cdot\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i) + k\cdot\sum_{i=1}^{n}(\ln(X_i))^2 + \lambda\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i\cdot\ln(X_i) - \sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)\cdot\ln(Y_i)\right) = 0 \\ 2\left(a\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i + k\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i\cdot\ln(X_i) + \lambda\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2 - \sum_{i=1}^{n}X_i\cdot\ln(Y_i)\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n\cdot a + k\cdot\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i) + \lambda\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i - \sum_{i=1}^{n}\ln(Y_i) = 0 \\ a\cdot\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i) + k\cdot\sum_{i=1}^{n}(\ln(X_i))^2 + \lambda\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i\cdot\ln(X_i) - \sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)\cdot\ln(Y_i) = 0 \\ a\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i + k\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i\cdot\ln(X_i) + \lambda\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2 - \sum_{i=1}^{n}X_i\cdot\ln(Y_i) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n\cdot a + k\cdot\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i) + \lambda\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i = \sum_{i=1}^{n}\ln(Y_i) \\ a\cdot\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i) + k\cdot\sum_{i=1}^{n}(\ln(X_i))^2 + \lambda\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i\cdot\ln(X_i) = \sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)\cdot\ln(Y_i) \\ a\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i + k\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i\cdot\ln(X_i) + \lambda\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}X_i\cdot\ln(Y_i) \end{cases}$$

Эту систему можно записать в матричной форме:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} n & \sum_{i=1}^{n}\ln(X_i) & \sum_{i=1}^{n}X_i & \sum_{i=1}^{n}\ln(Y_i) \\ \sum_{i=1}^{n}\ln(X_i) & \sum_{i=1}^{n}(\ln(X_i))^2 & \sum_{i=1}^{n}X_i\cdot\ln(X_i) & \sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)\cdot\ln(Y_i) \\ \sum_{i=1}^{n}X_i & \sum_{i=1}^{n}X_i\cdot\ln(X_i) & \sum_{i=1}^{n}(X_i)^2 & \sum_{i=1}^{n}X_i\cdot\ln(Y_i) \end{array}\right)$$

Линейную систему уравнений можно решить, сразу записав ответы по формулам Крамера. Для удобства вычисления определителей можно использовать встроенную в Microsoft Office Excel функцию МОПРЕД(массив), возвращающую определитель матрицы.

$a = \frac{\Delta_a}{\Delta}$, $k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$, $\lambda = \frac{\Delta_\lambda}{\Delta}$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n}\ln(X_i) & \sum_{i=1}^{n}X_i \\ \sum_{i=1}^{n}\ln(X_i) & \sum_{i=1}^{n}(\ln(X_i))^2 & \sum_{i=1}^{n}X_i\cdot\ln(X_i) \\ \sum_{i=1}^{n}X_i & \sum_{i=1}^{n}X_i\cdot\ln(X_i) & \sum_{i=1}^{n}(X_i)^2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} \ln(Y_i) & \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i) & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i) \cdot \ln(Y_i) & \sum_{i=1}^{n} (\ln(X_i))^2 & \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \ln(X_i) \\ \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \ln(Y_i) & \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \ln(X_i) & \sum_{i=1}^{n} (X_i)^2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} \ln(Y_i) & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i) & \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i) \cdot \ln(Y_i) & \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \ln(X_i) \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \ln(Y_i) & \sum_{i=1}^{n} (X_i)^2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_\lambda = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i) & \sum_{i=1}^{n} \ln(Y_i) \\ \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i) & \sum_{i=1}^{n} (\ln(X_i))^2 & \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i) \cdot \ln(Y_i) \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \ln(X_i) & \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \ln(Y_i) \end{vmatrix}$$

Осталось вспомнить, что $a=\ln(A)$. Поэтому $A=e^a$.